Tipos de funciones

- Funciones
  - Algebraicas
    - Polinómicas
      - Constantes
      - De 1^{er} grado
      - Cuadráticas
    - Racionales
    - Radicales
    - A trozos
  - Trascendentes
    - Exponenciales
    - Logarítmicas
    - Trígonométricas

Clasificación de funciones

Funciones algebraicas

En las funciones algebraicas las operaciones que hay que efectuar con la variable independiente son: la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Las funciones algebraicas pueden ser:

Funciones explícitas

Si se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución.

$f(x) = 5x - 2$

Funciones implícitas

Si no se pueden obtener las imágenes de x por simple sustitución, sino que es preciso efectuar operaciones.

$5x - y - 2 = 0$

Funciones polinómicas

Son las funciones que vienen definidas por un polinomio.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + a_1 x^3 + \cdots + a_n x^n$

Su dominio es $\mathbb{R}$, es decir, cualquier número real tiene imagen.

Funciones constantes

El criterio viene dado por un número real.

$f(x)= k$

La gráfica es una recta horizontal paralela a al eje de abscisas.

Funciones polinómica de primer grado

$f(x) = mx +n$

Su gráfica es una recta oblicua, que queda definida por dos puntos de la función.

Funciones cuadráticas

$f(x) = ax^2 + bx +c$

Son funciones polinómicas es de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.

Funciones racionales

El criterio viene dado por un cociente entre polinomio:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m}$$

El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.

Funciones radicales

El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical.

El dominio de una función irracional de índice impar es R.

El dominio de una función irracional de índice par está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

Funciones trascendentes

La variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

Función exponencial

$$f(x) = a^x$$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x*.

Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

$$f(x) = \log_a x$$

$$a > 0,\ a \neq 1$$

Funciones trigonométricas

Función seno

f(x) = sen x

Función coseno

f(x) = cosen x

Función tangente

f(x) = tg x

Función cosecante

f(x) = cosec x

Función secante

f(x) = sec x

Función cotangente

f(x) = cotg x

Funciones constantes

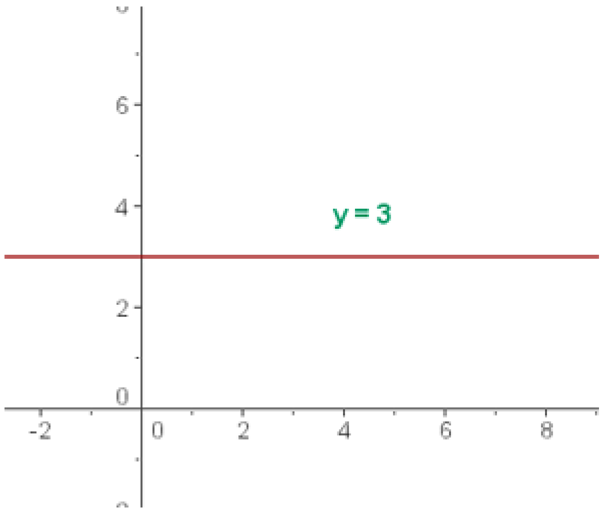
La f**unción constante** es del tipo:

y = n

El criterio viene dado por un número real.

La pendiente es 0.

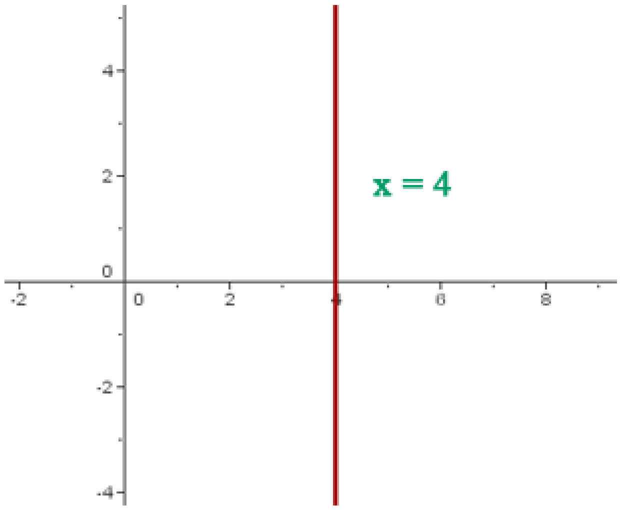
La **gráfica** es una **recta horizontal paralela a al eje de abscisas**.



Rectas verticales

Las rectas paralelas al eje de ordenadas **no** son **funciones**, ya que un valor de x tiene infinitas imágenes y para que sea función sólo puede tener una. Son del tipo:

x = K



Función lineal

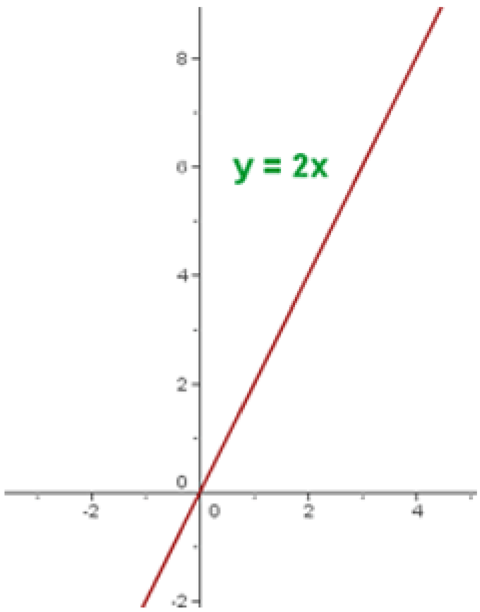
La **función lineal** es del tipo:

y = mx

Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

y = 2x

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
y = 2x	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**

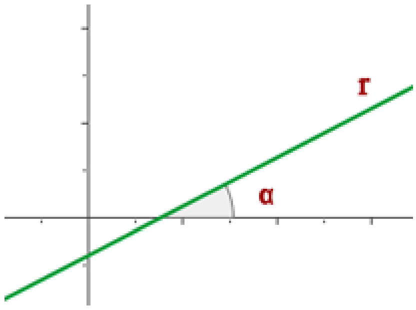


Pendiente

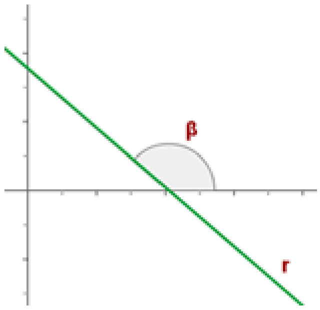
m es la **pendiente** de la recta.

La **pendiente** es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas.

Si m > 0 la función es creciente y **ángulo** que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **agudo**.



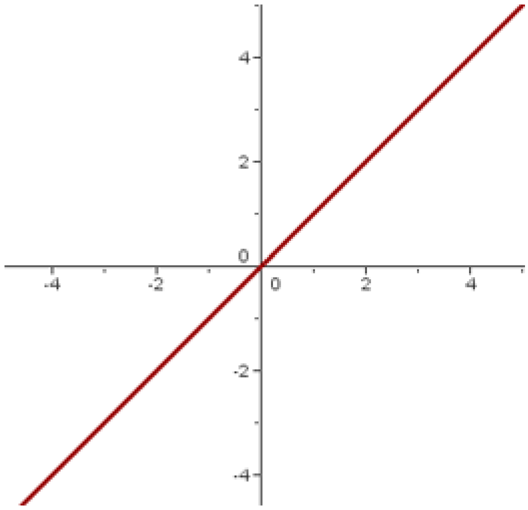
Si m < 0 la función es decreciente y **ángulo** que forma la recta con la parte positiva del eje OX es **obtuso**.



Función identidad

f(x) = x

Su gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.



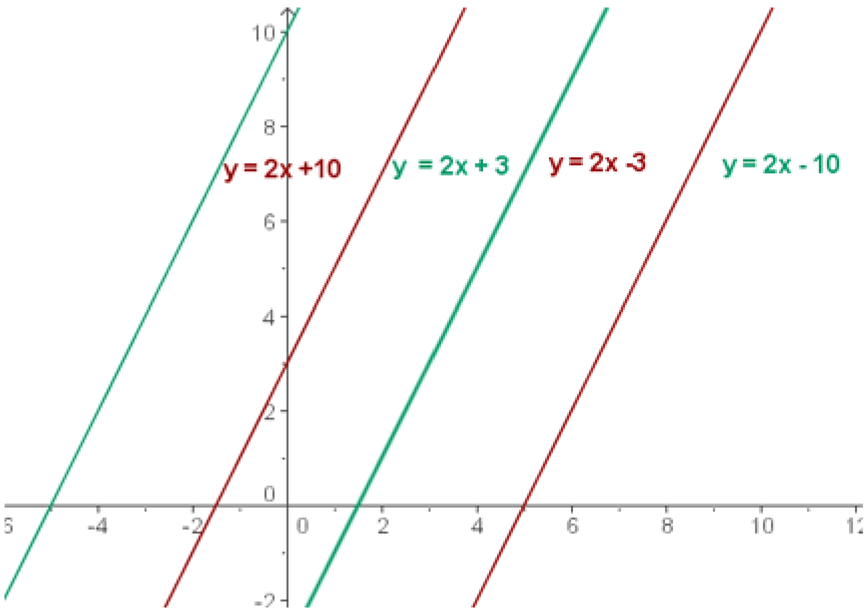
Función afín

La **función afín** es del tipo: **y = mx + n**

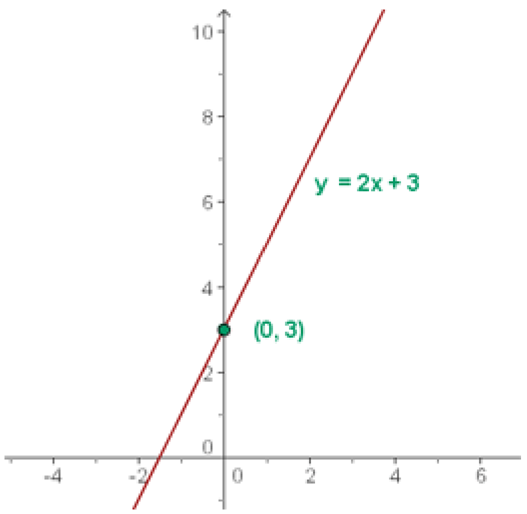
m es la **pendiente** de la recta.

La **pendiente** es la **inclinación** de la recta con respecto al eje de abscisas.

Dos **rectas paralelas** tienen la misma **pendiente**.



n es la ordenada en el origen y nos indica el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

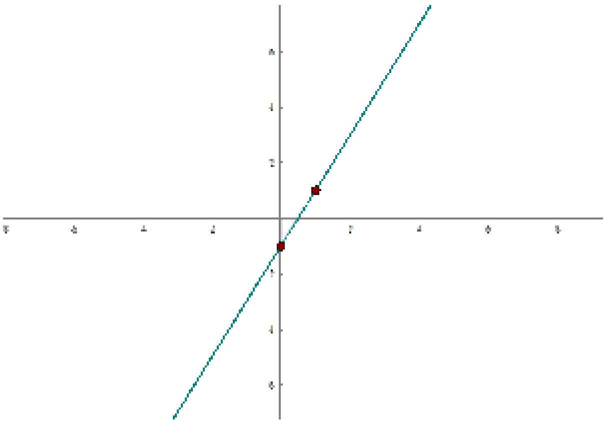


Ejemplos de funciones afines

Representa las funciones:

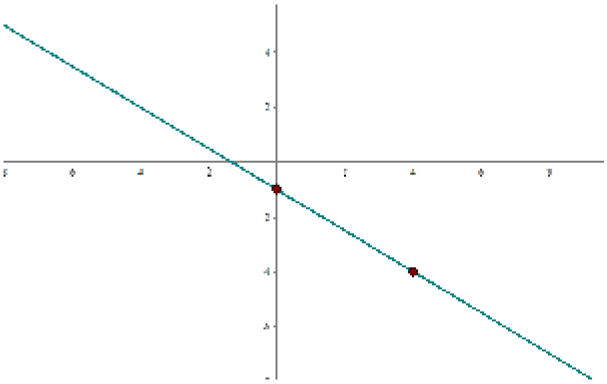
1 $y = 2x - 1$

x	y = 2x-1
0	-1
1	1



2 $y = -\frac{3}{4}x - 1$

x	$y = -\frac{3}{4}x-1$
0	-1
4	-4



Función cuadrática

Son funciones polinómicas es de segundo grado, siendo su gráfica una parábola.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Representación gráfica de la parábola

Podemos construir una parábola a partir de estos puntos:

1. Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) \qquad V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Por este punto pasa el eje de simetría de la parábola.

La ecuación del eje de simetría es:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

2. Puntos de corte con el eje OX.

En el eje de abscisas la segunda coordenada es cero, por lo que tendremos:

$ax^2 + bx + c = 0$

Resolviendo la ecuación podemos obtener:

Dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ si $b^2 - 4ac > 0$

Un punto de corte: $(x_1, 0)$ si $b^2 - 4ac = 0$

Ningún punto de corte si $b^2 - 4ac < 0$

3. Punto de corte con el eje OY.

En el eje de ordenadas la primera coordenada es cero, por lo que tendremos:

$f(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c$ $\quad$ $(0,c)$

Representar la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$

1. Vértice

$x_v = -(-4) / 2 = 2$ $\quad$ $y_v = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1$

V(2, -1)

2. Puntos de corte con el eje OX.

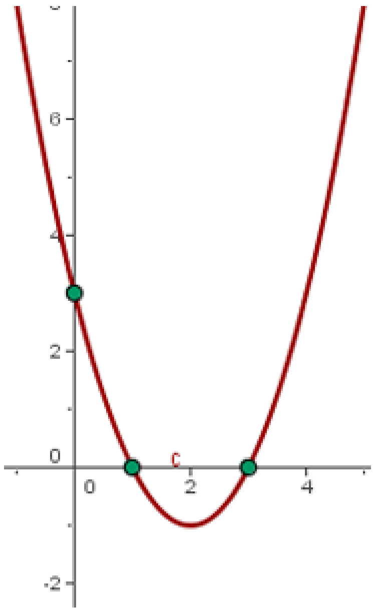
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

(3, 0) $\quad$ (1, 0)

3. Punto de corte con el eje OY.

(0, 3)

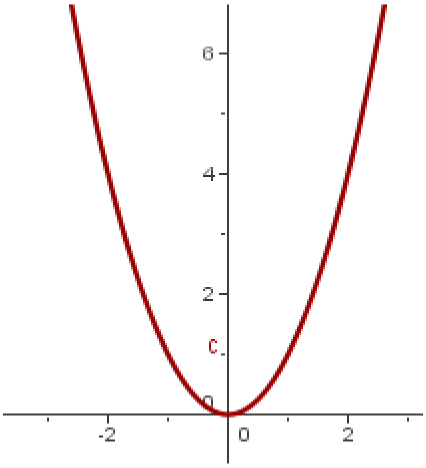


Traslaciones de parábolas

Construcción de parábolas a partir de $y = x^2$

Partimos de $y = x^2$

x	$y = x^2$
-2	**4**
-1	**1**
0	**0**
1	**1**
2	**4**



1. Traslación vertical

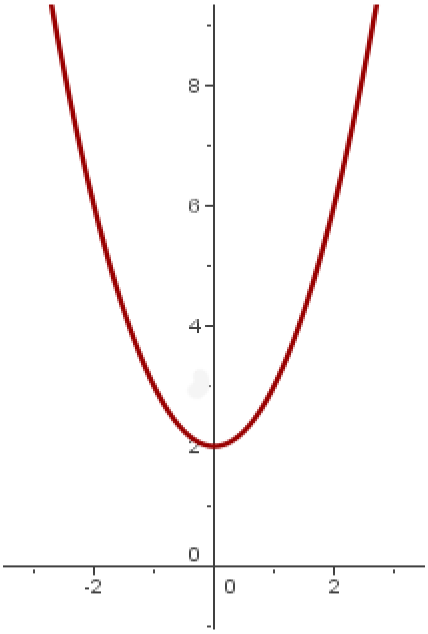
$y = x^2 + k$

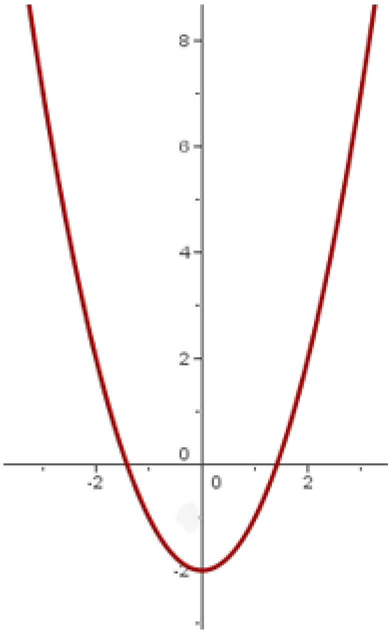
Si K > 0, $y = x^2$ se desplaza hacia arriba k unidades.

Si K < 0, $y = x^2$ se desplaza hacia abajo k unidades.

El vértice de la parábola es: (0, k).

El eje de simetría x = 0.





$y = x^2 +2$ $y = x^2 -2$

2. Traslación horizontal

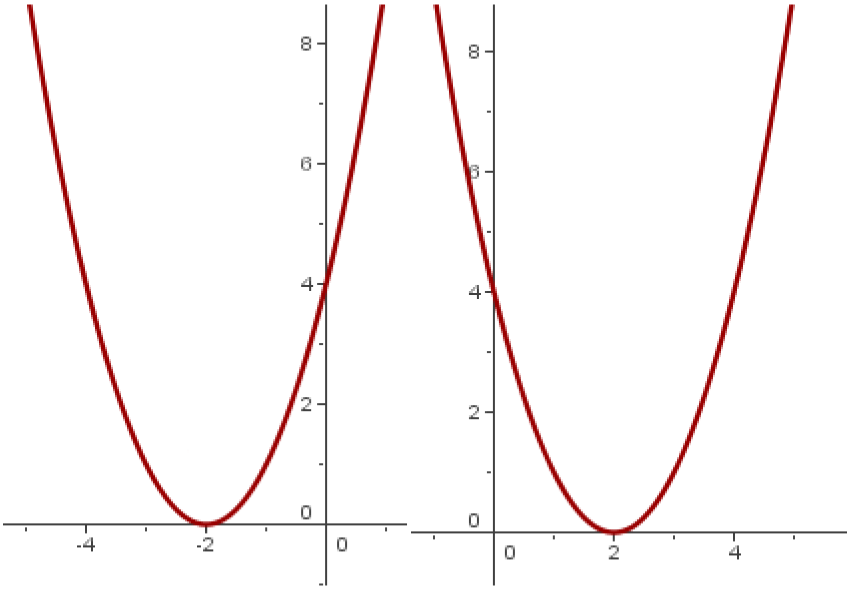
$y = (x + h)^2$

Si $h > 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia la izquierda h unidades.

Si $h < 0$, $y = x^2$ se desplaza hacia la derecha h unidades.

El vértice de la parábola es: $(-h, 0)$.

El eje de simetría es $x = -h$.



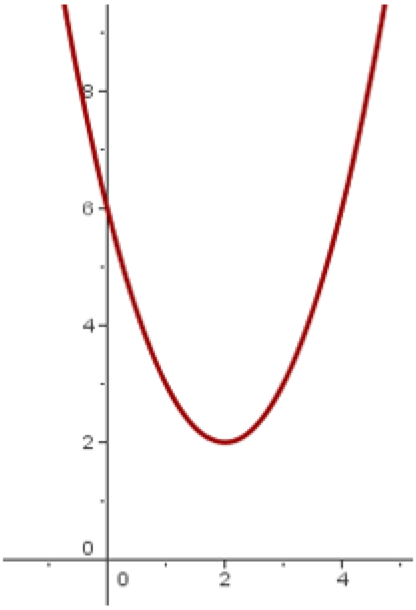
$y = (x + 2)^2 y = (x - 2)^2$

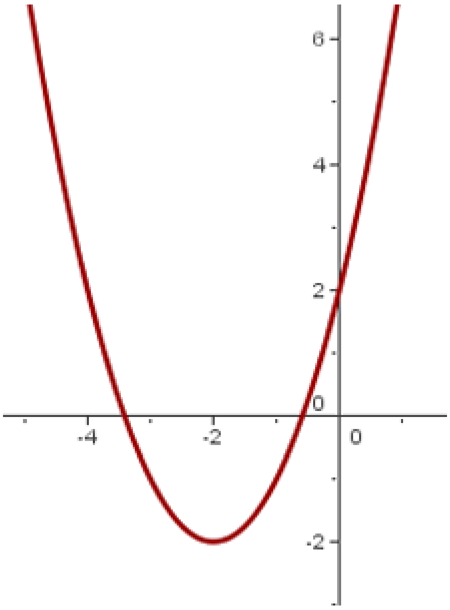
3. Traslación oblicua

$y = (x + h)^2 + k$

El vértice de la parábola es: $(-h, k)$.

El eje de simetría es $x = -h$.



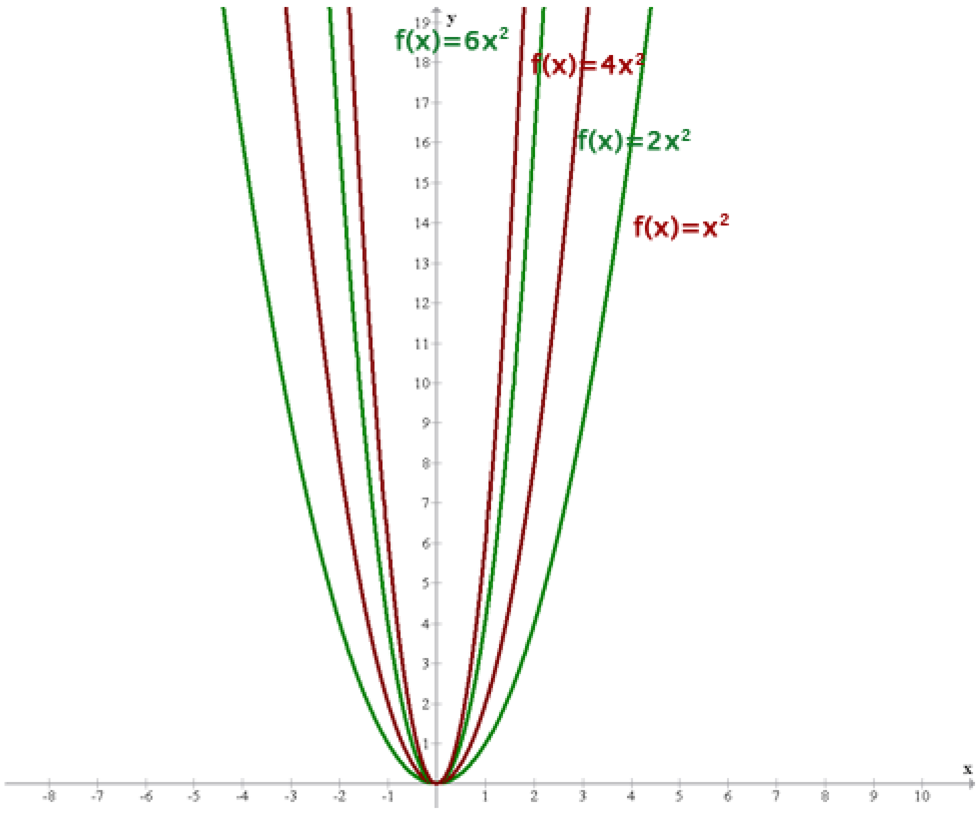


$y = (x - 2)^2 + 2$ $y = (x + 2)^2 - 2$

Dilataciones y contracciones de funciones

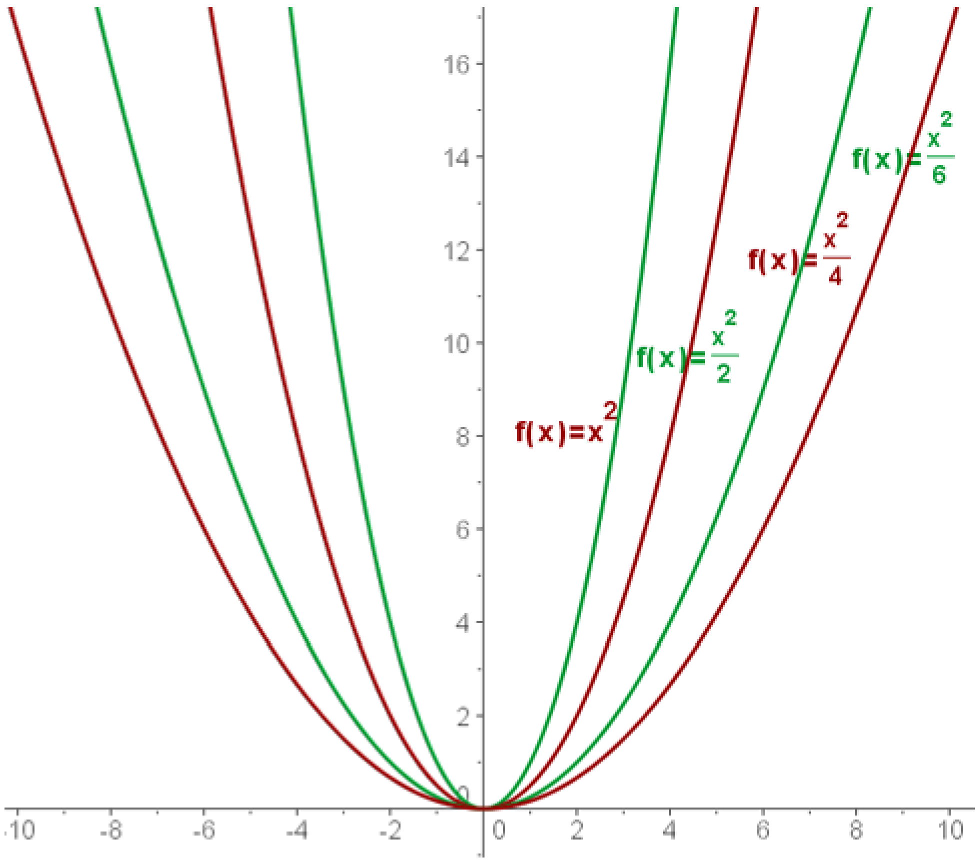
Contracción de una función

Una función $f(k \cdot x)$ se contrae si $K > 1$.



Dilatación de una función

Una función f(k·x) se dilata si 0 < K < 1.



Funciones racionales

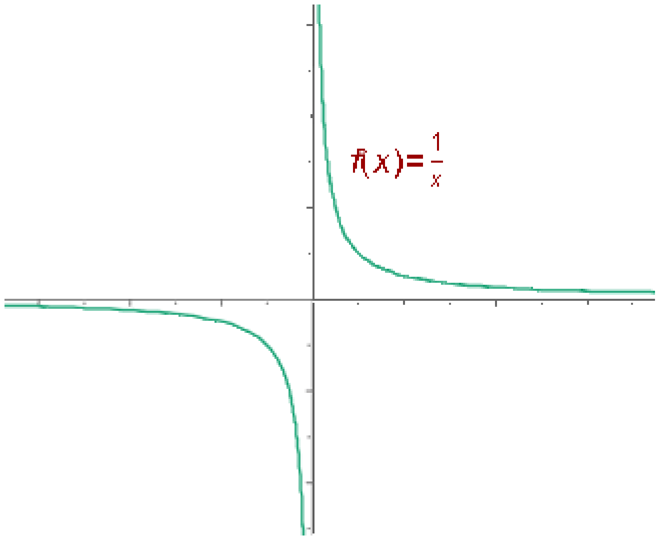
El criterio viene dado por un cociente entre polinomios:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}$$

El dominio lo forman todos los números reales excepto los valores de x que anulan el denominador.

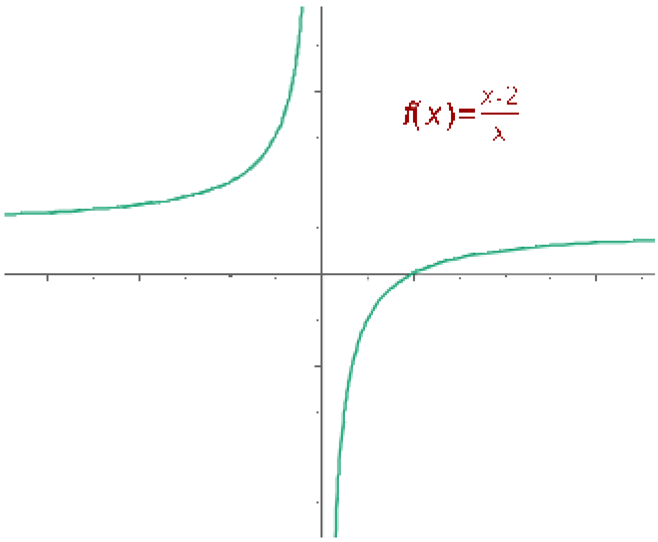
Dentro de este tipo tenemos las **funciones de proporcionalidad inversa** de ecuación:

$$f(x) = \frac{k}{x}.$$



Sus gráficas son hipérbolas. También son hipérbolas las gráficas de las funciones.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$



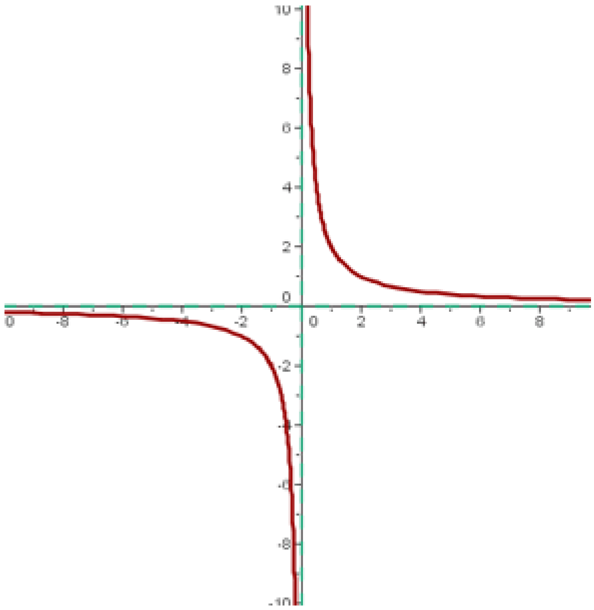
Traslaciones de hipérbolas

Las hipérbolas $f(x) = \frac{k}{x}$ son las más sencillas de representar.

Sus asítontas son los ejes.

El centro de la hipérbola, que es el punto donde se cortan las asíntotas, es el origen.

$$f(x) = \frac{2}{x}$$



A partir de estas hipérbolas se obtienen otras por traslación.

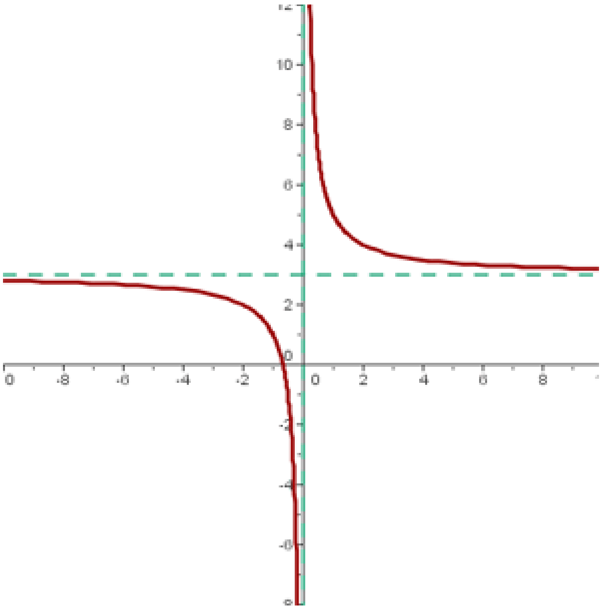
1. Traslación vertical

$$f(x) = \frac{k}{x} + a$$

El centro de la hipérbola es: (0, a).

Si a>0, $f(x) = \frac{k}{x}$ **se desplaza hacia arriba a unidades.**

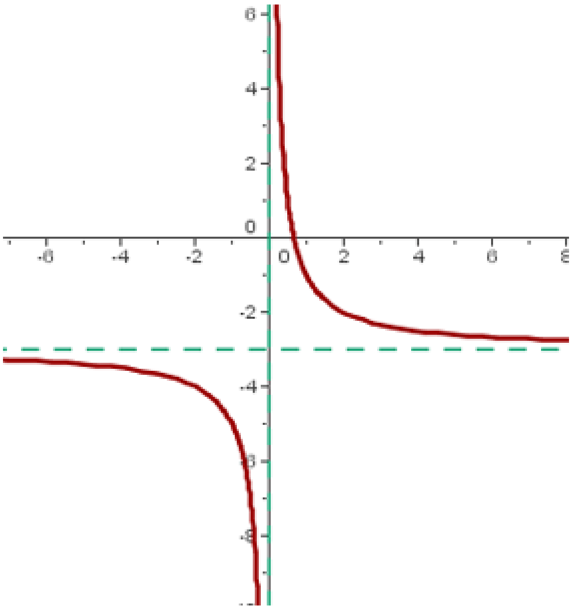
$$f(x) = \frac{2}{x} + 3$$



El centro de la hipérbola es: (0, 3)

Si **a<0**, $f(x)=\dfrac{k}{x}$ **se desplaza hacia abajo** **a** **unidades.**

$$f(x)=\frac{2}{x}-3$$



El centro de la hipérbola es: (0, -3)

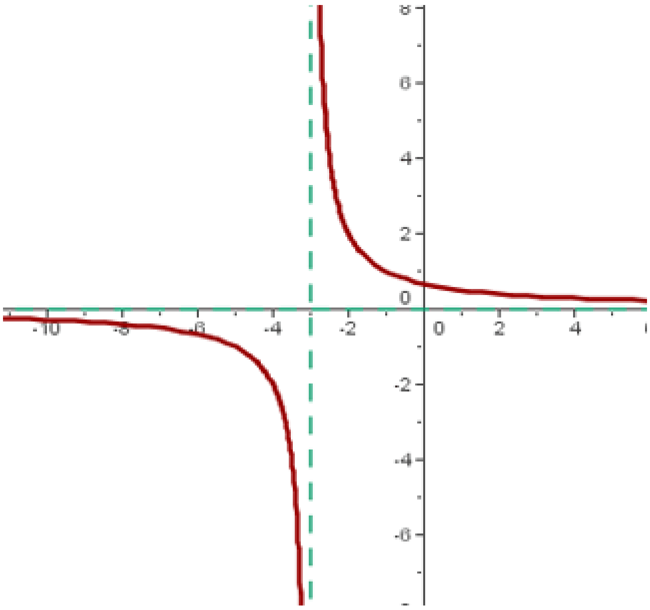
2. Traslación horizontal

$$f(x) = \frac{k}{(x+b)}$$

El centro de la hipérbola es: (-b, 0).

Si b> 0, $f(x) = \frac{k}{x}$ **se desplaza a la izquierda b unidades.**

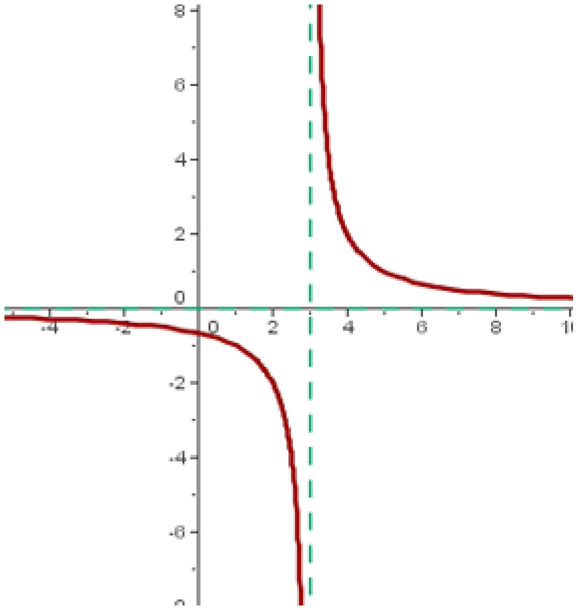
$$f(x) = \frac{2}{x+3}$$



El centro de la hipérbola es: (-3, 0)

Si b<0, $f(x) = \frac{k}{x}$ **se desplaza a la derecha b unidades.**

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$



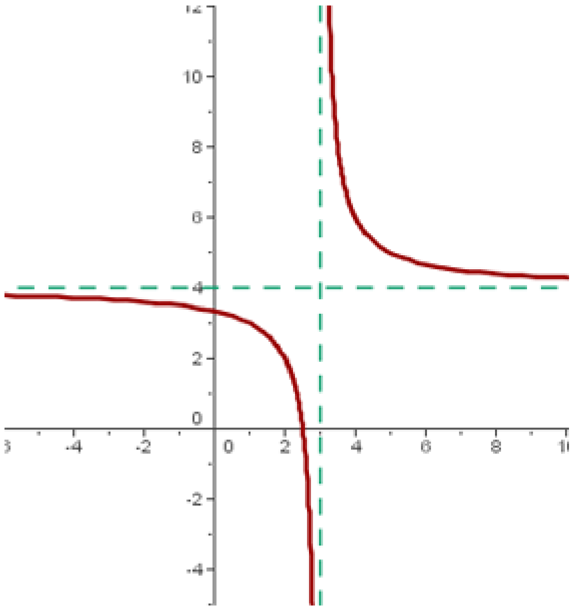
El centro de la hipérbola es: (3, 0)

3. Traslación oblicua

$$f(x) = \frac{k}{(x+b)} + a$$

El centro de la hipérbola es: (-b, a)

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + 4$$



El centro de la hipérbola es: (3, 4).

Para representar hipérbolas del tipo:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

se divide y se escribe como:

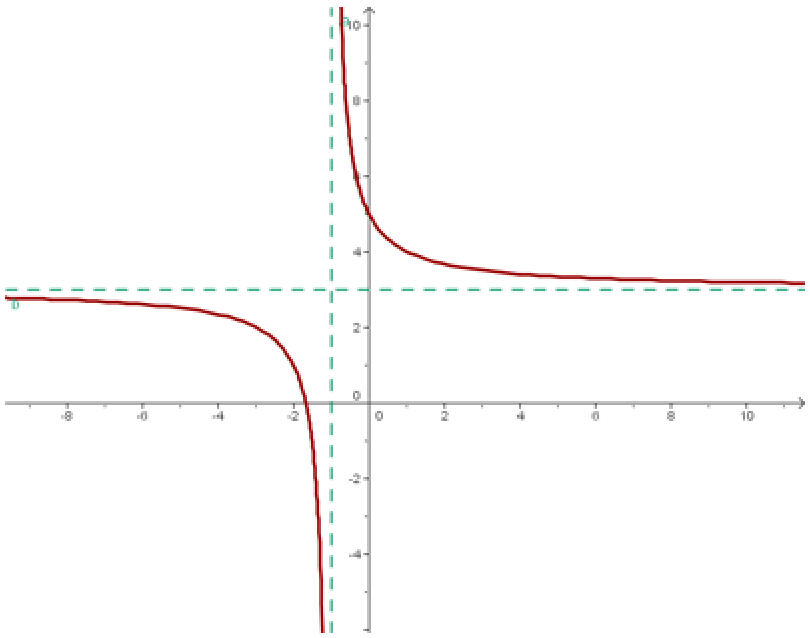
$$f(x) = \frac{k}{(x+b)} + a$$

Su representación gráfica es una hipérbola de **centro (-b, a) y de asíntotas paralelas a los ejes.**

$$y = \frac{3x+5}{x+1}$$

$$\begin{array}{rl} 3x+5 & \underline{|x+1} \\ -3x-3 & \quad 3 \\ 2 & \end{array}$$

$$y = \frac{2}{x+1} + 3$$



El centro de la hipérbola es: (-1, 3).

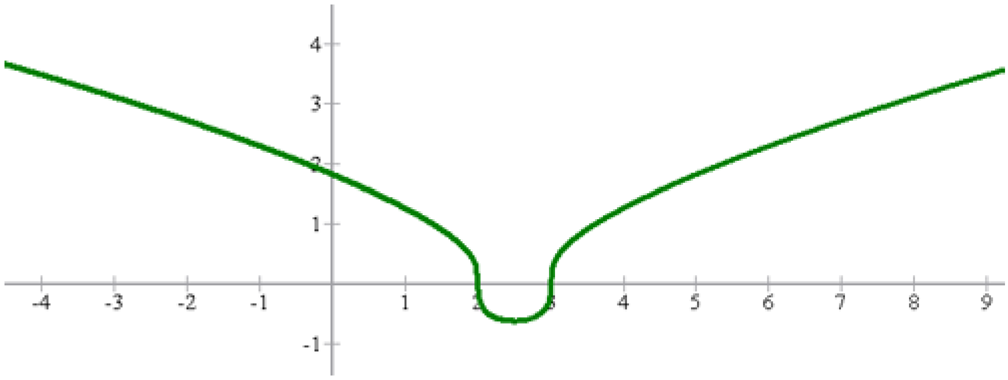
Funciones radicales

El criterio viene dado por la variable x bajo el signo radical.

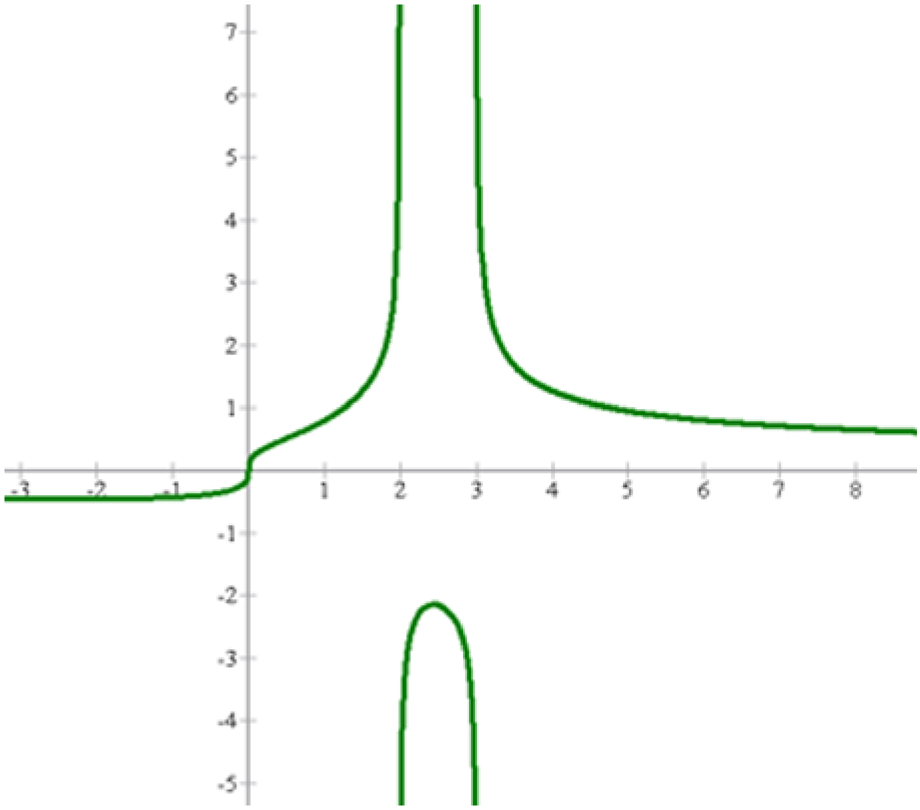
Función radical de índice impar

El dominio es $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ $\qquad D = \mathbb{R}$



$f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}}$ $\qquad D = \mathbb{R} - \{2,3\}$

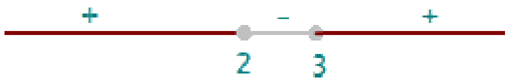


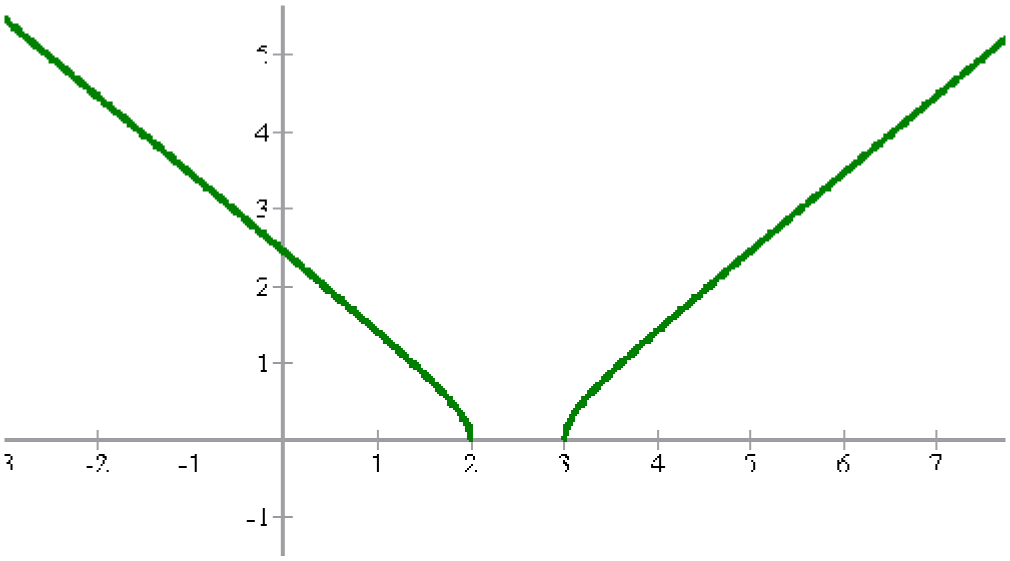
Función radical de índice par

El dominio está formado por todos los valores que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ $\quad\quad$ $D = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

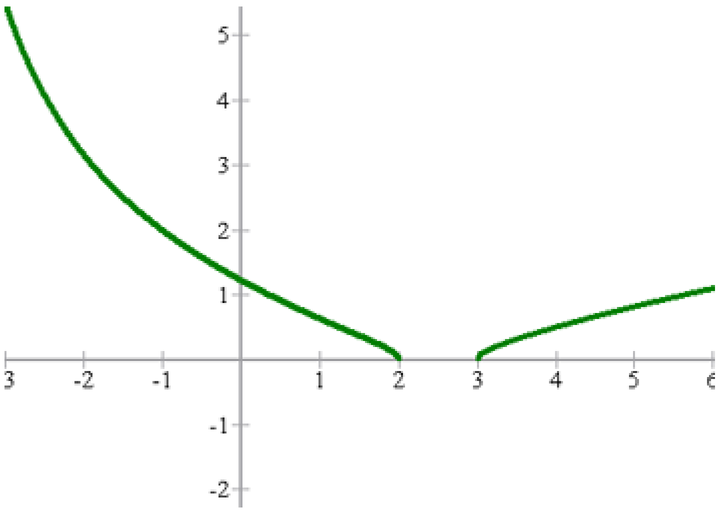




$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x + 4}$$

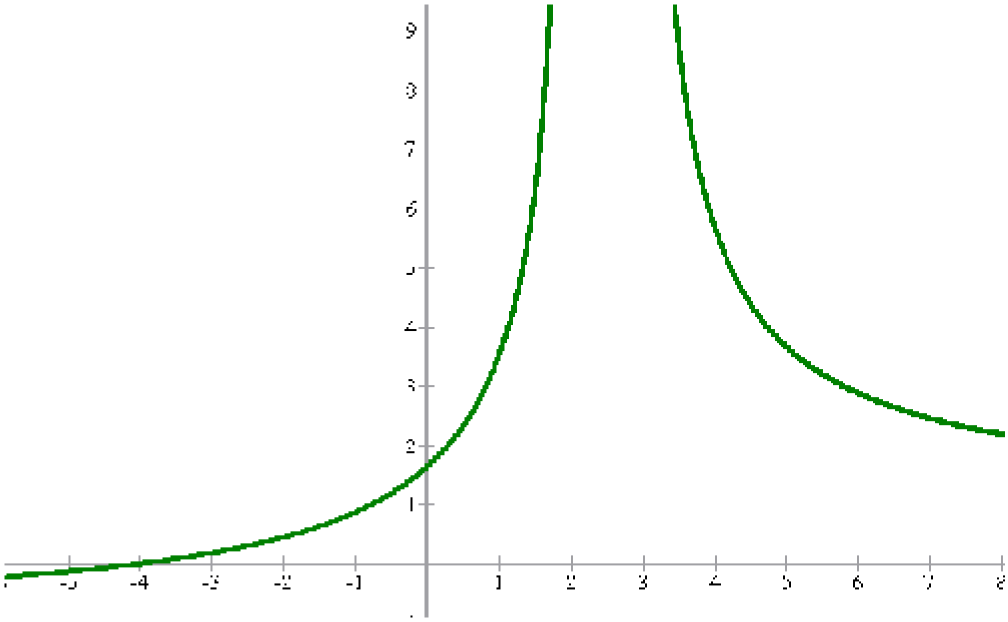
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 & \quad (-\infty, 2] \cup [3, \infty) \\ x + 4 = 0 & \quad x \neq -4 \end{cases}$$

$D = (-\infty, -4) \cup (-4, 2] \cup [3, \infty)$



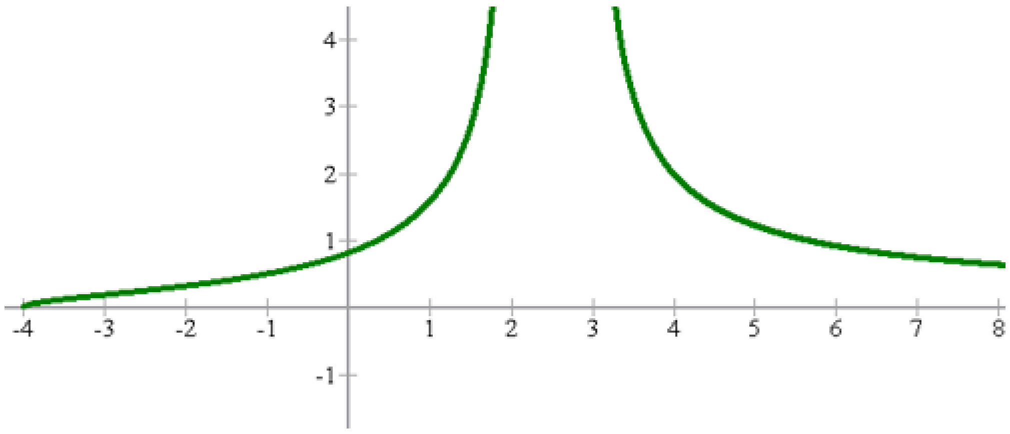
$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$x^2 - 5x + 6 > 0$ $\quad$ $D = (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$



$$f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6}}$$

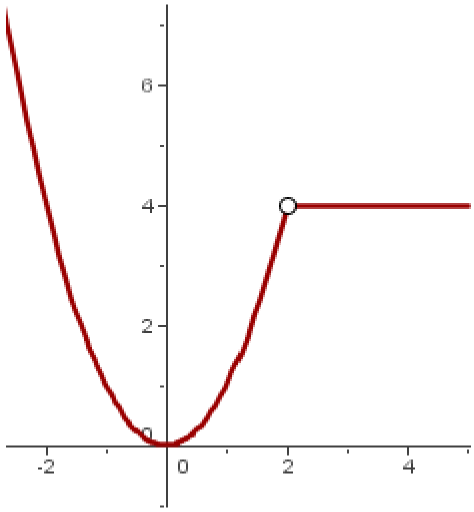
$\frac{x+4}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ $\quad$ $D = [-4, 2) \cup (3, \infty)$



Funciones definidas a trozos

Son funciones definidas por distintos criterios, según los intervalos que se consideren.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



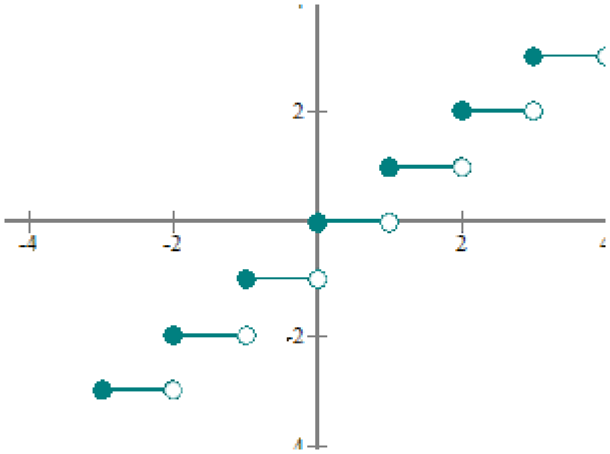
El dominio lo forman todos los números reales menos el 4.

Función parte entera de x

Es una función que a cada número real hace corresponder el número entero inmediatamente inferior.

f(x) = E (x)

x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
f(x) = E(x)	0	0	0	1	1	1	1

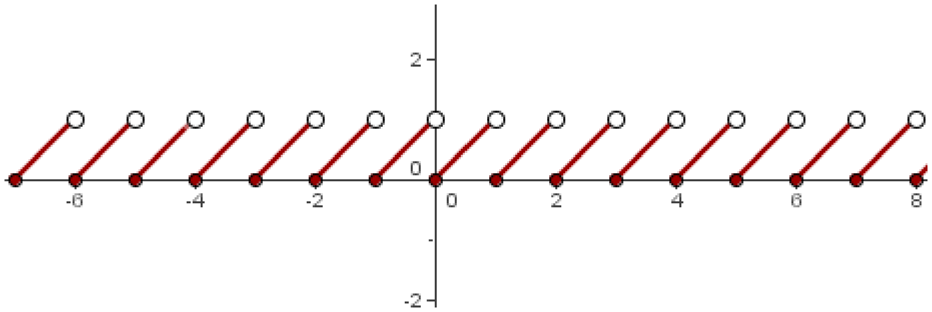


Función mantisa

Función que hace corresponder a cada número el mismo número menos su parte entera.

f(x) = x - E (x)

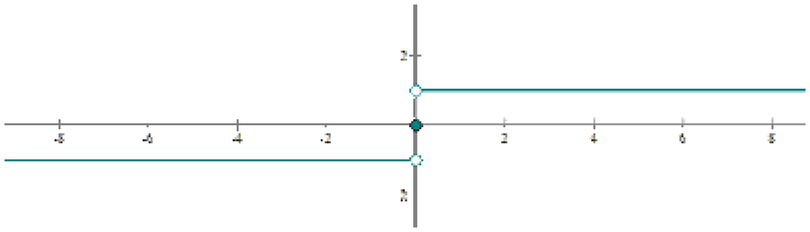
x	0	0.5	0.9	1	1.5	1.9	2
f(x) = x - E(x)	0	0.5	0.9	0	0.5	0.9	0



Función signo

f(x) = sgn(x)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



Función valor absoluto

Las funciones en valor absoluto se transforman en funciones a trozos, siguiendo los siguientes pasos:

1. Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto, y **se calculan sus raíces**.

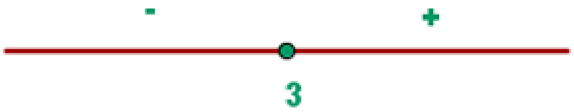
2. Se forman **intervalos con las raíces y se evalúa el signo** de cada intervalo.

3. Definimos la función a trozos, teniendo en cuenta que en l**os intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función**.

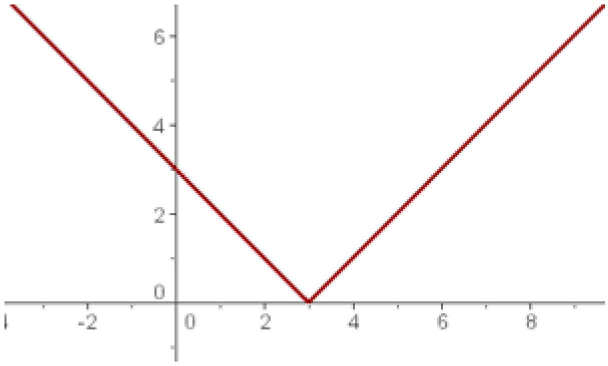
4 Representamos la función resultante.

$$f(x) = |x - 3|$$

$x - 3 = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $x = 3$



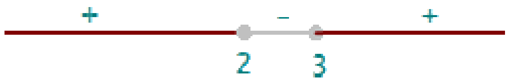
$$f(x)=\begin{cases}-(x-3) & \text{si} \quad x<3\\ x-3 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$



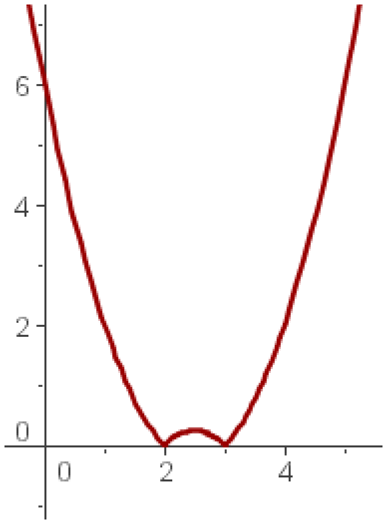
D= $\mathbb{R}$

$$f(x)=\left|x^2-5x+6\right|$$

$x^2-5x+6=0 \qquad x=2 \qquad x=3$



$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+6 & \text{si} \quad x<2\\ -\left(x^2-5x+6\right) & \text{si} \quad 2\leq x<3\\ x^2-5x+6 & \text{si} \quad x\geq 3\end{cases}$$



D= $\mathbb{R}$

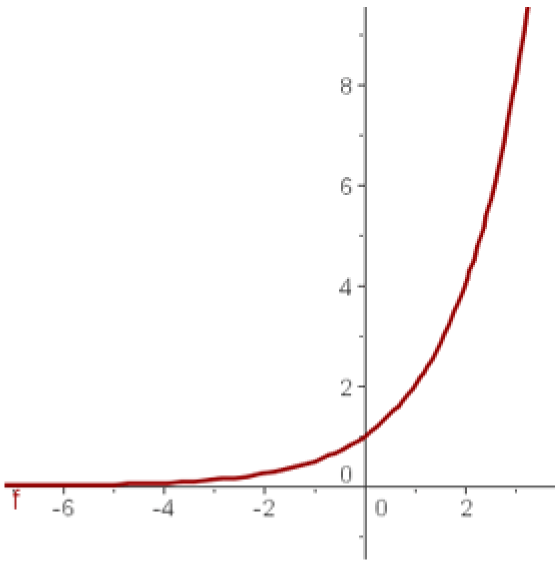
Función exponencial

La **función exponencial** es del tipo:

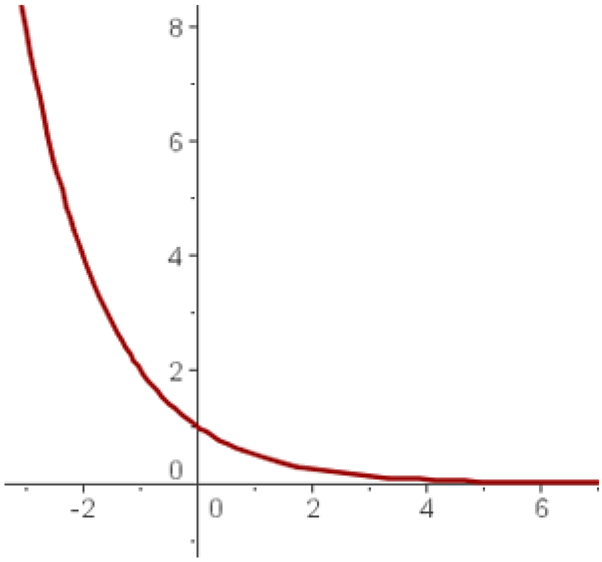
$f(x) = a^x$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x*.

$f(x) = 2^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Propiedades de la función exponencial

Dominio: $\mathbb{R}$.

Recorrido: $\mathbb{R}^+$.

Es continua.

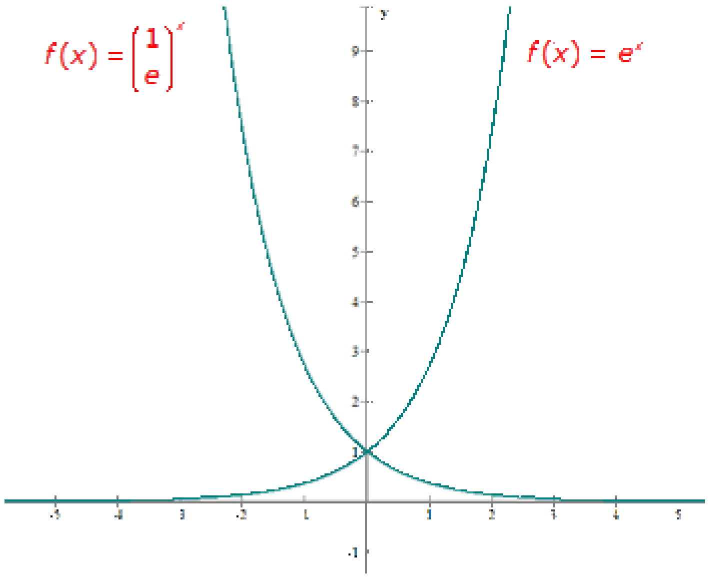
Los puntos (0, 1) y (1, a) pertenecen a la gráfica.

Es inyectiva $a \neq 1$(ninguna imagen tiene más de un original).

Creciente si a>1.

Decreciente si a<1.

Las curvas $y=a^x$ e $y= (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.



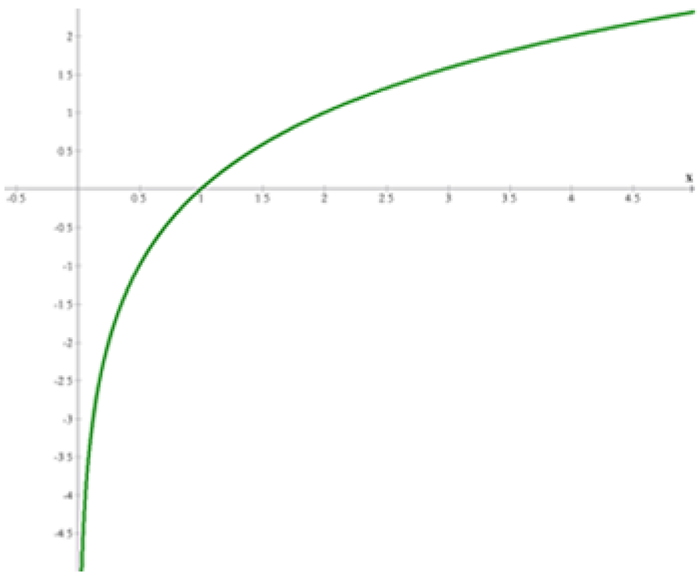
Funciones logarítmicas

La **función logarítmica** en base a es la **función inversa de la exponencial** en base a.

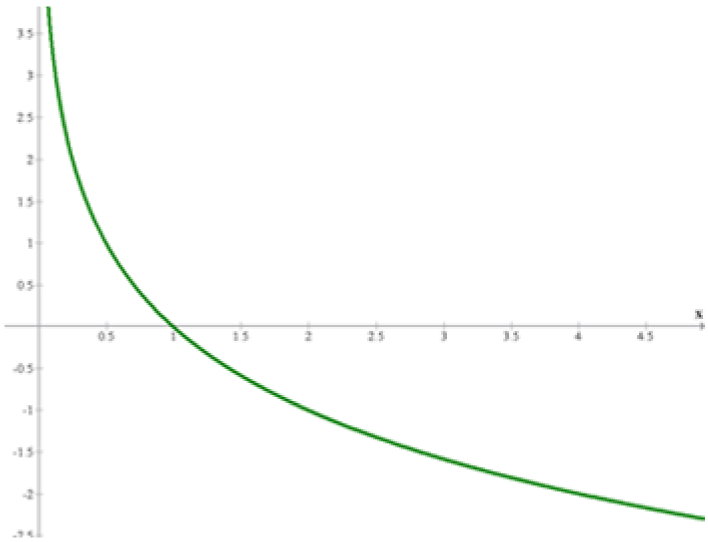
$$f(x) = \log_a x$$

$$a > 0,\ a \neq 1$$

$$f(x) = \log_2 x$$



$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$



Propiedades de las funciones logarítmicas

De la **definición de logaritmo** podemos deducir:

No existe el logaritmo de un número con base negativa.

$\nexists \log_{-a} x$

No existe el logaritmo de un número negativo.

$\nexists \log_{a}(-x)$

No existe el logaritmo de cero.

$\nexists \log_{a} 0$

El logaritmo de 1 es cero.

$\log_{a} 1 = 0$

El logaritmo en base a de a es uno.

$\log_{a} a = 1$

El logaritmo en base a de una potencia en base a es igual al exponente.

$\log_a a^n = n$

Las características de la función logarítmica $y = log_a x$ son:

Dominio: $\mathbb{R}^+$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Es continua.

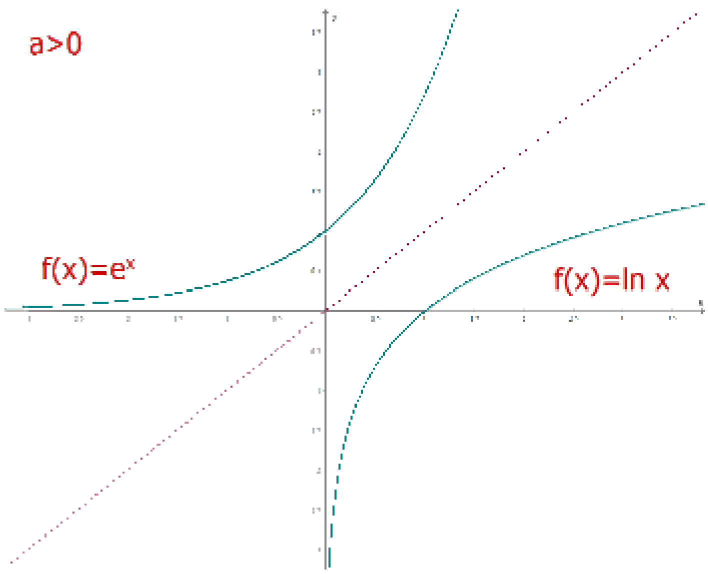
Los puntos (1, 0) y (a, 1) pertenecen a la gráfica.

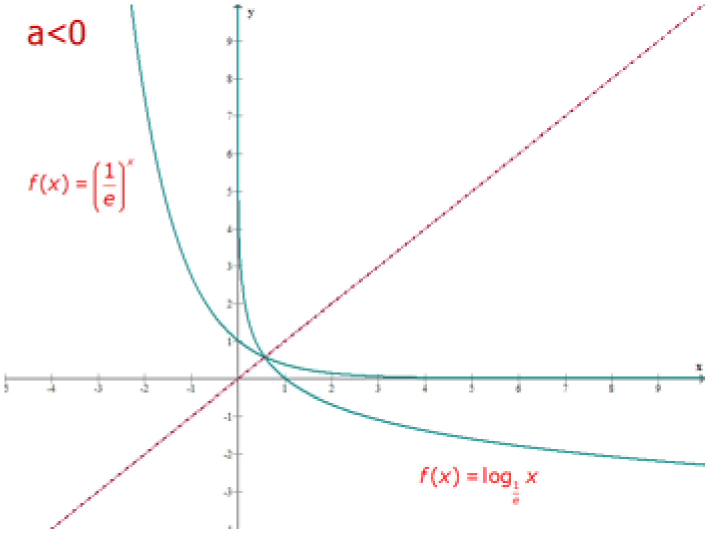
Es inyectiva (ninguna imagen tiene más de un original).

Creciente si a>1.

Decreciente si a<1.

Las gráfica de la **función logarítmica es simétrica** (respecto a la bisectriz del 1er y 3er cuadrante) de la gráfica **de la función exponencial**, ya que son funciones reciprocas o inversas entre sí.

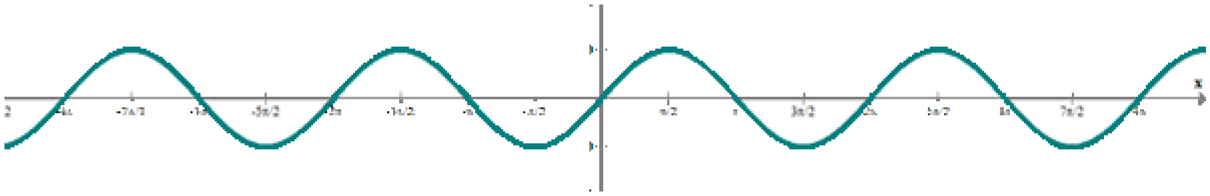




Funciones trigonométricas

Función seno

f(x) = sen x



Dominio: $\mathbb{R}$

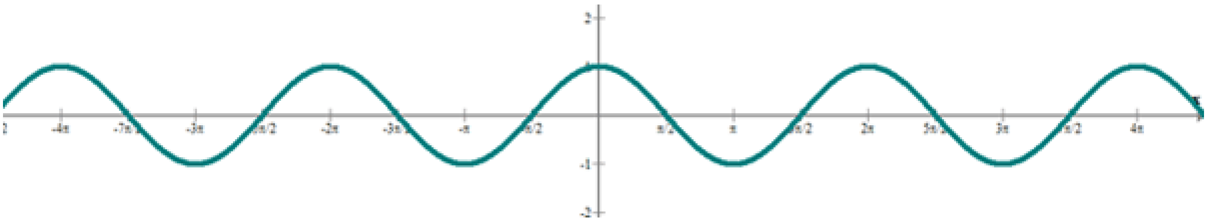
Recorrido: [-1, 1]

Período: 2π rad

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$

Impar: sen(-x) = -sen x

f(x) = cos x



Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: [-1, 1]

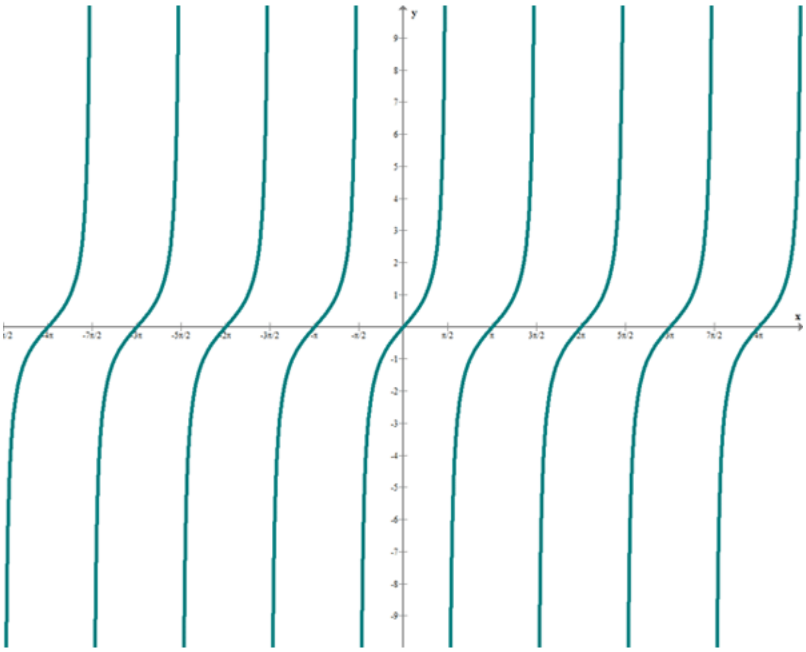
Período: $2\pi\ rad$

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R}$

Par: cos(-x) = cos x

Función tangente

f(x) = tg x



Dominio: $\mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

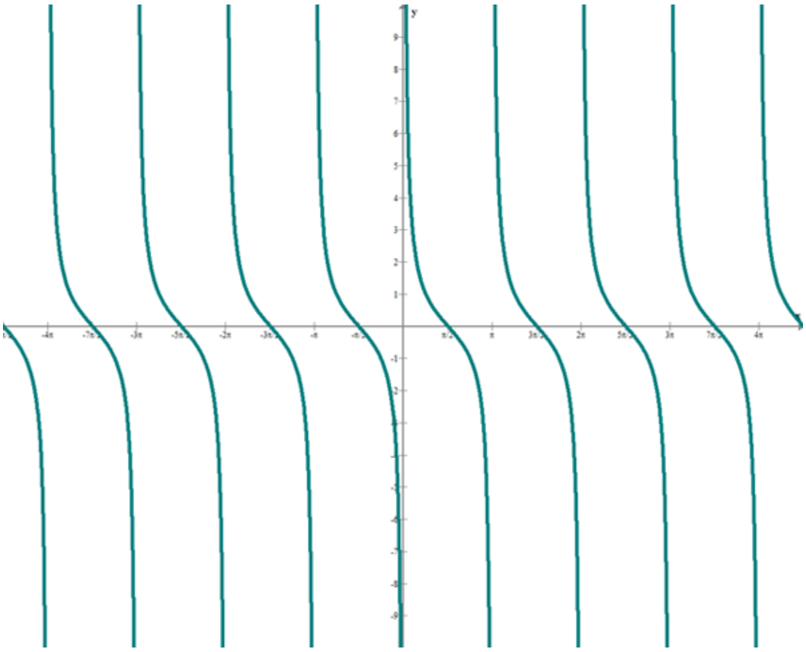
Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi \cdot k)\}$

Período: π *rad*

Impar: tg(-x) = tg x

Función cotangente

f(x) = cotg x



Dominio: $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi , k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$

Recorrido: $\mathbb{R}$

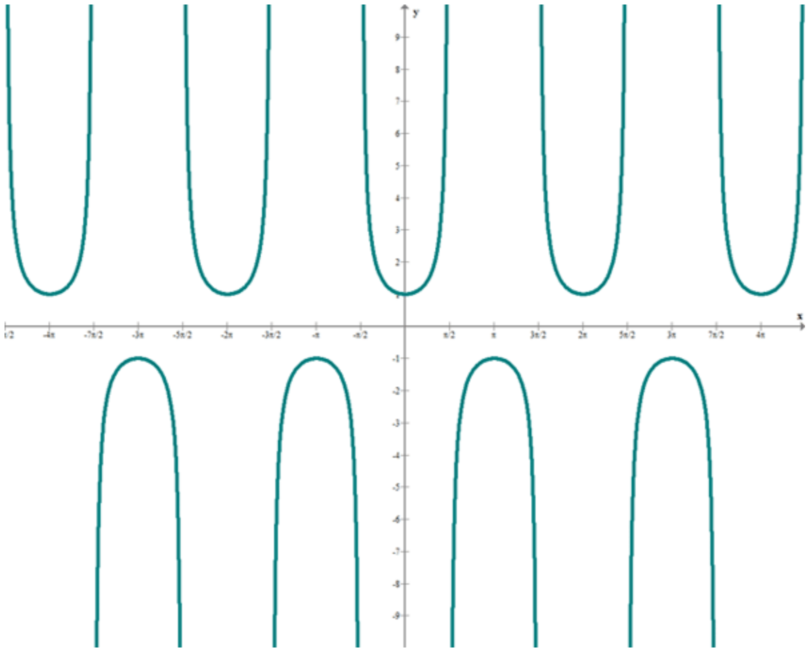
Continuidad: Continua en $x \in \mathbb{R} - \{\pi \cdot k , k \in \mathbb{Z}\}$

Período: π *rad*

Impar: cotg(-x) = cotg x

Función secante

f(x) = sec x



Dominio: $\mathbb{R} - \{(2k+1)\cdot\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2,\ \pi/2, 3\pi/2,\ \ldots\}$

Recorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

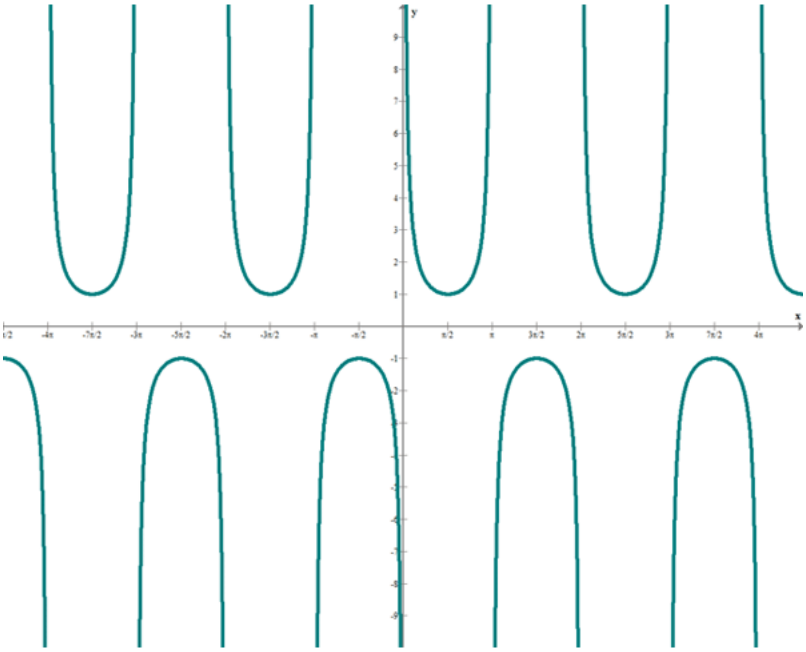
Período: 2π *rad*

Continuidad: Continua en $\forall x \in \mathbb{R} - \{(\pi/2 + \pi\cdot k)\}$

Par: sec(-x) = sec x

Función cosecante

f(x) = cosec x



Dominio: $\mathbb{R} - \{k \cdot \pi , k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} - \{\ldots, -\pi, 0, \pi, \ldots\}$

Recorrido: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Período: 2π rad

Continuidad: Continua en $x \in \mathbb{R} - \{\pi \cdot k , k \in \mathbb{Z}\}$

Impar: cosec(-x) = -cosec x